ΑΣΚΗΣΗ (SOS)

$f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με $|f(x)-f(y)|\le \frac{1}{2}|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$

Για $x_1\in[\alpha,\beta]$ ορίζουμε ακολουθία $x_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left[x_\nu+f(x_\nu)\right]$

ΝΔΟ:
1) Η f συνεχής
2) $x_\nu\in[\alpha,\beta], \forall \nu\in\mathbb{N}$
3) $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ είναι AC
4) $\exists \xi\in[\alpha,\beta]: f(\xi)=\xi$

ΛΥΣΗ

1) Αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in[\alpha,\beta]): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\varepsilon$.

όμως $|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$

όπου $|x-y|<\delta$, άρα $|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2}\delta$, για $\delta=2\varepsilon$

2) Μέσω Μαθηματικής επαγωγής

Ξέρουμε, ότι $x_1\in[\alpha,\beta]$, Υποθέτουμε ότι $x_\nu\in[\alpha,\beta]$

Και ΘΔΟ $x_{\nu+1}\in[\alpha,\beta]$

• $\alpha\le x_\nu\le\beta \Rightarrow \alpha\le f(x_\nu)\le\beta$

$$\frac{(+)\quad \alpha\le x_\nu\le\beta}{2\alpha\le f(x_\nu)+x_\nu\le 2\beta \Rightarrow \alpha\le\frac{1}{2}\left(f(x_\nu)+x_\nu\right)\le\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha\le x_{\nu+1}\le\beta}$$

3) Έστω, $|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}|=\left|\frac{1}{2}\left(f(x_{\nu+1})+x_{\nu+1}\right)-\frac{1}{2}\left(x_\nu+f(x_\nu)\right)\right|\le$

$$\le\frac{1}{2}|x_{\nu+1}-x_\nu|+\frac{1}{2}|f(x_{\nu+1})-f(x_\nu)|\le\frac{1}{2}|x_{\nu+1}-x_\nu|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_{\nu+1}-x_\nu|=\frac{3}{4}|x_{\nu+1}-x_\nu|$$

• $\nu=1$, $|x_3-x_2|\le\frac{3}{4}|x_2-x_1|$

• $\nu=2$, $|x_4-x_3|\le\frac{3}{4}|x_3-x_2|$

⋮

• $\nu=\nu$, $|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}|\le\frac{3}{4}|x_{\nu+1}-x_\nu|$

πολ/σιασμε

$|x_{\nu+2}-x_{\nu+1}|\le\left(\frac{3}{4}\right)^\nu\cdot|x_2-x_1|, \forall\nu\in\mathbb{N}$

Από βασικό ΛΗΜΜΑ (Απόδειξη)

Αν μια ακολουθία ικανοποιεί τη σχέση $|a_{\nu+1}-a_\nu|\le M\cdot c^\nu$, $M>0$, $0<c<1$ είναι AC

4) Η $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ είναι AC

$\Rightarrow x_\nu\to\xi \Rightarrow f(x_\nu)\to f(\xi)$ όπου $\lim x_{\nu+1}=\frac{1}{2}\lim x_\nu+\frac{1}{2}\lim f(x_\nu)\Rightarrow$

f συνεχής

$$\Rightarrow \xi=\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}f(\xi)\Rightarrow\boxed{f(\xi)=\xi}$$